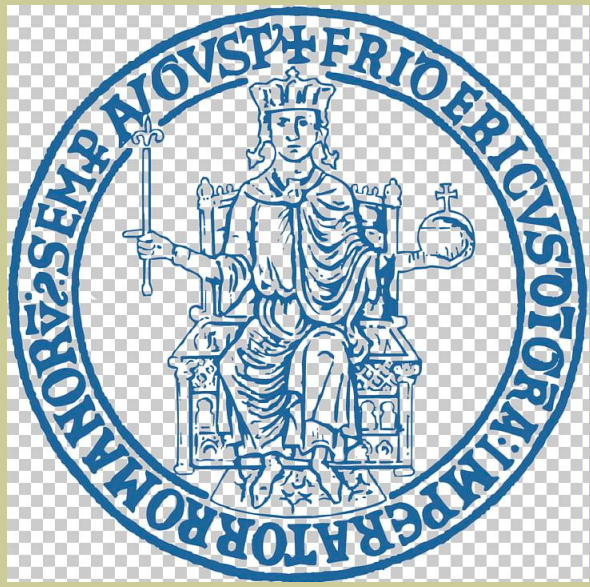




DIETI

DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA ELETTRICA E DELLE TECNOLOGIE DELL'INFORMAZIONE

FONDAMENTI DI CIRCUITI ELETTRICI PER INGEGNERIA INFORMATICA E AUTOMATICA

Bilanci Energetici e Potenza di un Bipolo

C. Visone



Introduzione

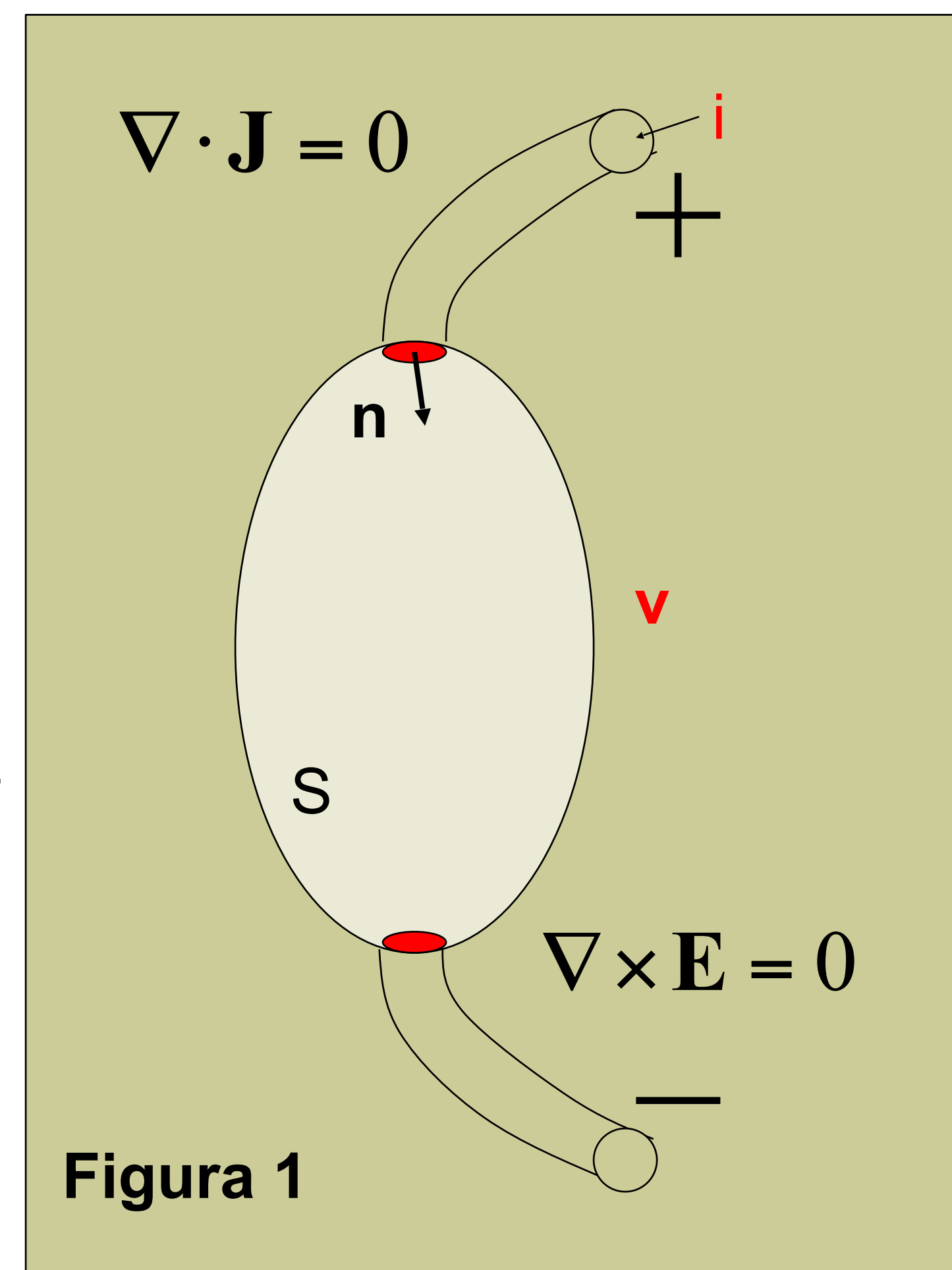
- Ogni circuito elettrico, come del resto ogni dispositivo fisico, assorbe lavoro con una assegnata velocità (energia/tempo);
- In altri termini, il dispositivo assorbe o eroga verso l'esterno una ben definita **potenza**:

- $$p(t) = \frac{\Delta W}{\Delta t}$$

- E' estremamente importante anche per i circuiti elettrici definire relazioni tra le grandezze circuitali che permettano di determinare la potenza che il bipolo eroga/assorbe;
- A tale scopo introduciamo uno strumento che ci permetta di descrivere i flussi di potenza in un elemento circuitale.

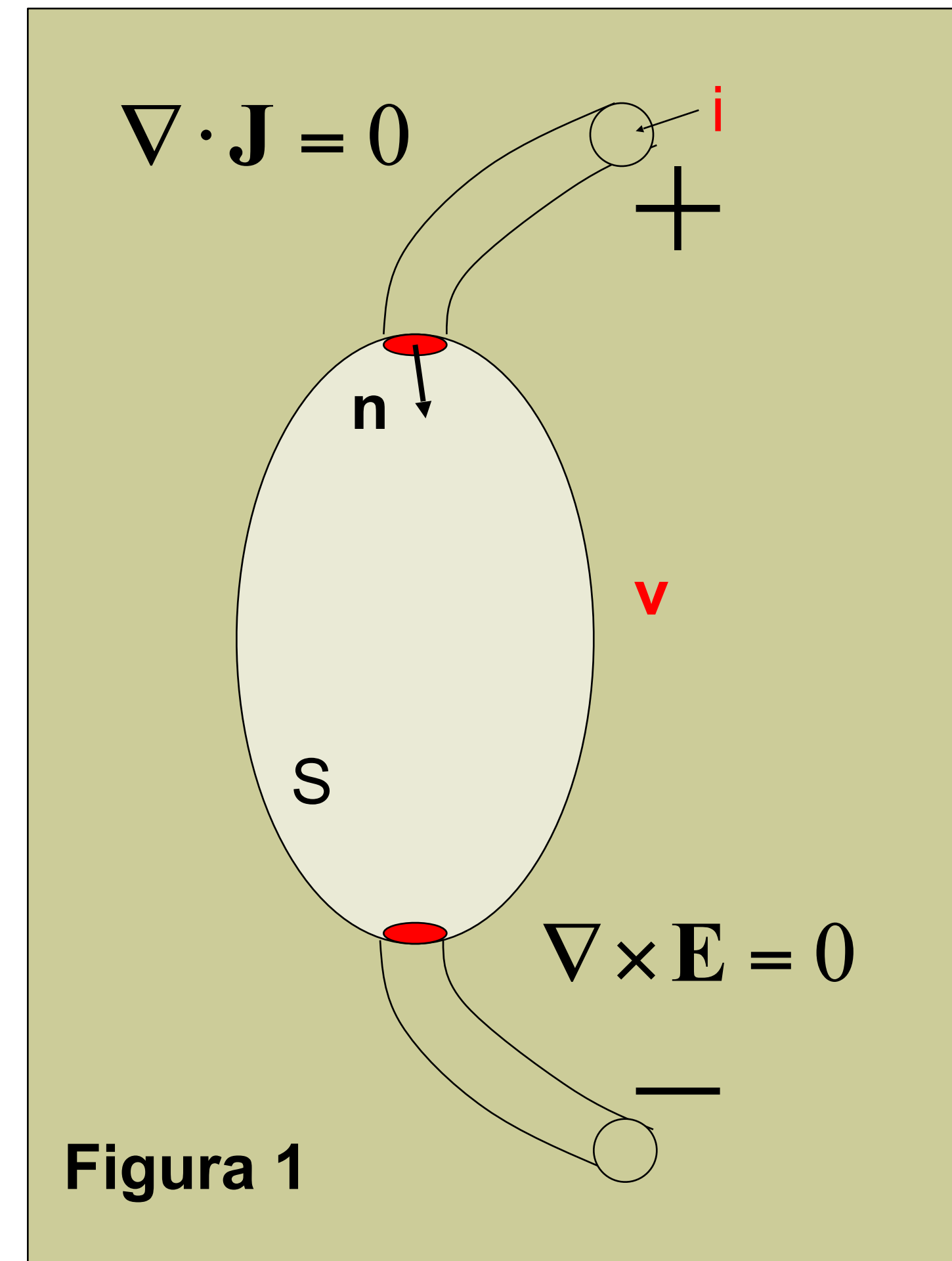
Le ipotesi circuitali

- In figura 1 è mostrato, a titolo di esempio, un **BIPOLO** elettrico;
- Nelle ipotesi circuitali, il campo di corrente, $\mathbf{J}$, ed il campo elettrico, $\mathbf{E}$, al di fuori del suo “involucro”, risultano **solenoidale** e **conservativo**, rispettivamente.
- In tali condizioni è possibile definire in maniera non ambigua la tensione v ai morsetti e la corrente i su uno qualunque dei terminali.



Bilancio Energetico – Teorema di Poynting

- Proveremo ad effettuare un bilancio energetico per il dispositivo in figura;
- In Elettromagnetismo Tale bilancio va sotto il nome di **Teorema di Poynting**;
- Troveremo un vettore, definito **VETTORE DI POYNTING $\mathbf{S}$** , che rappresenta il flusso di energia che entra nel bipolo;
- Nelle ipotesi di validità del **modello circuitale**, **$\mathbf{S}$** assumerà una espressione semplice ed estremamente significativa.





Bilanci Energetico – Teorema di Poynting

Si considerino le seguenti equazioni:

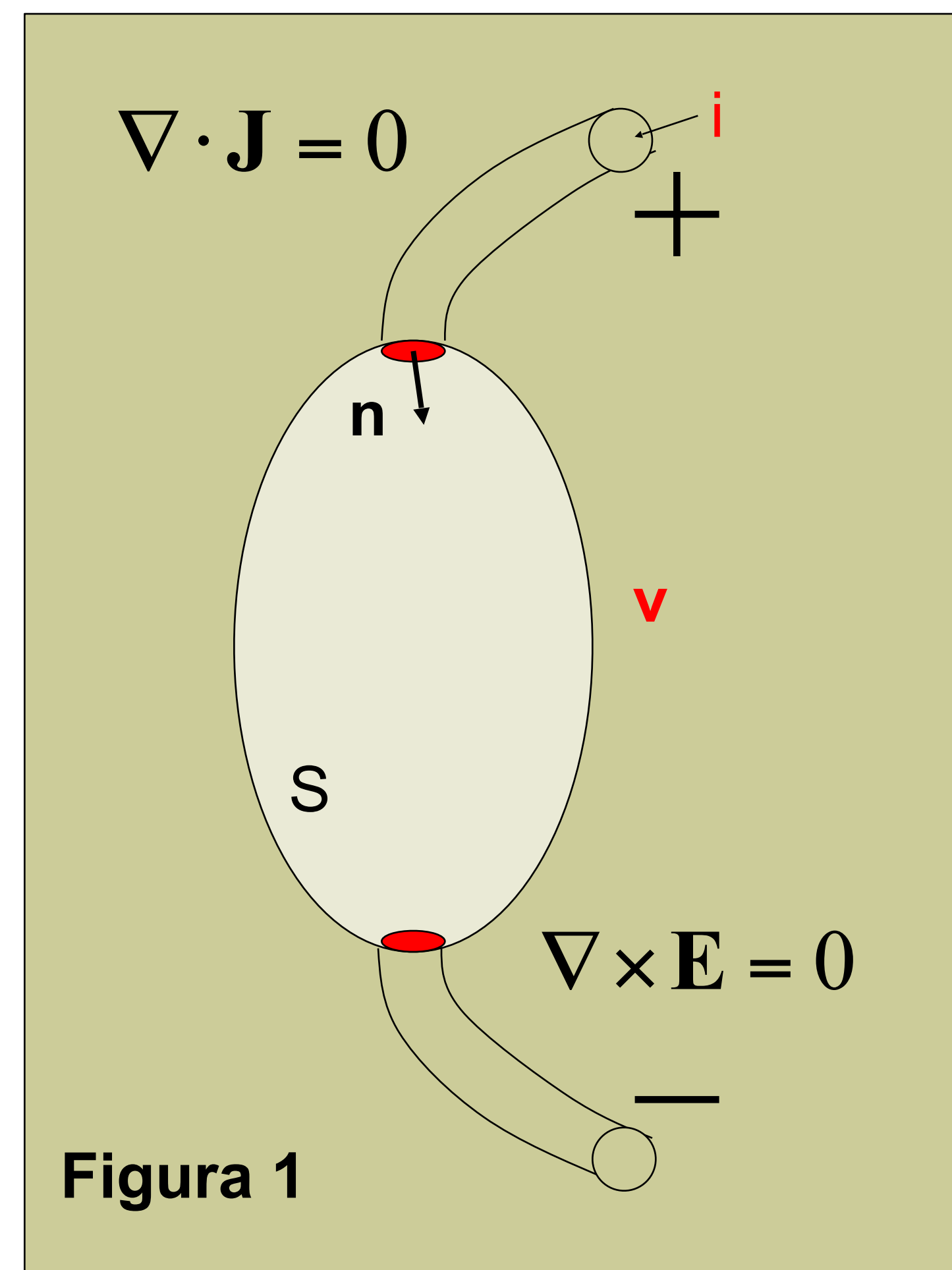
$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

Moltiplicando scalarmente la prima equazione per il campo magnetico e la seconda per il campo elettrico si ottiene:

$$\mathbf{H} \cdot \nabla \times \mathbf{E} = -\mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$





Sottraendo membro a membro si ottiene:

$$\mathbf{H} \cdot \nabla \times \mathbf{E} - \mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{H} = - \left(\mathbf{E} \cdot \mathbf{J} + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right)$$

Sfruttando adesso l'identità vettoriale:

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{H} \cdot \nabla \times \mathbf{E} - \mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{H}$$

Il prodotto vettore tra $\mathbf{E}$ e $\mathbf{H}$ prende il nome di **Vettore di Poynting**

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$$

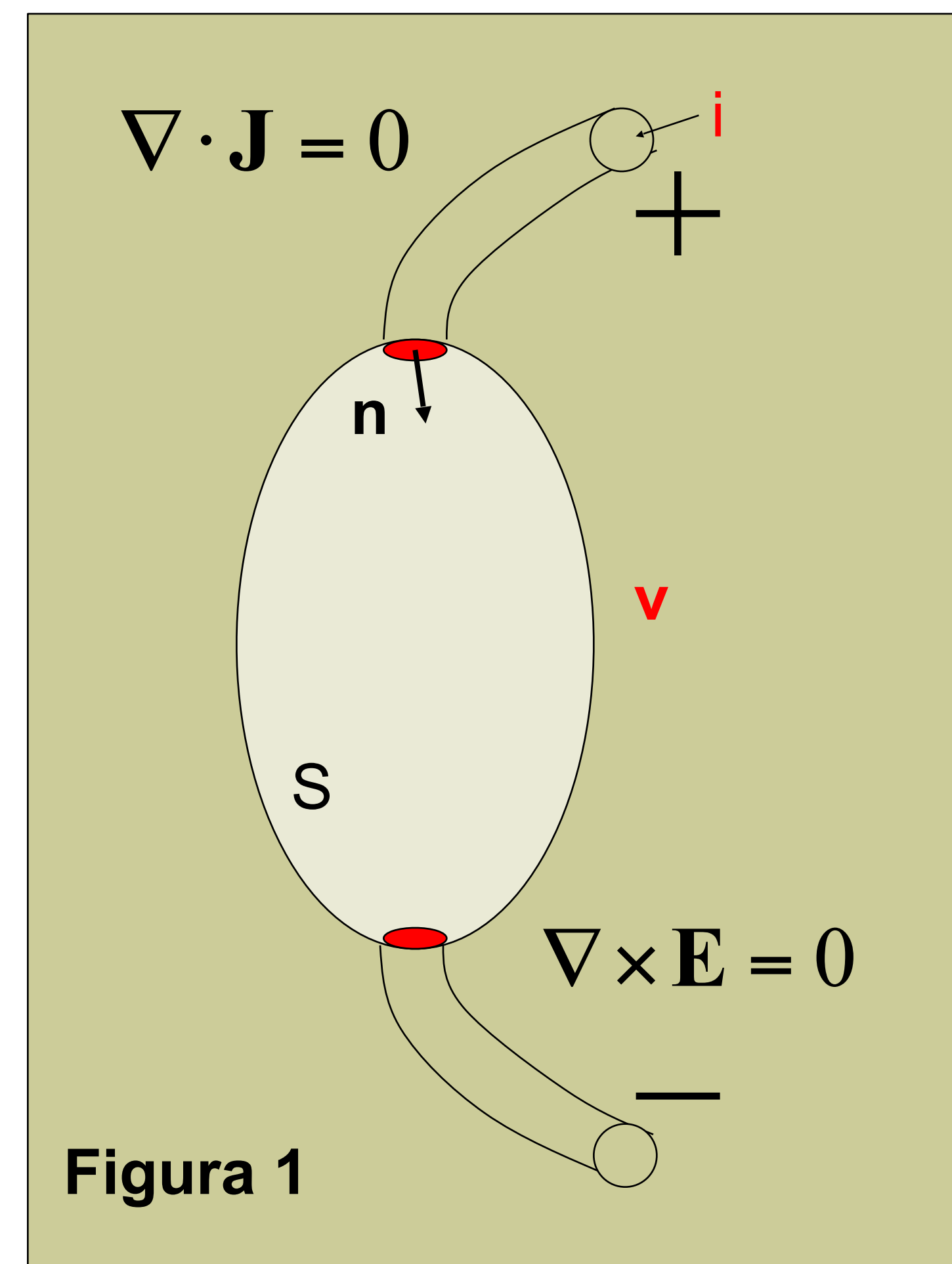


Figura 1



Per semplicità, anche se non necessario ai fini della dimostrazione, assumiamo:

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$$

Cioè che i materiali in esame siano lineari

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$$

Allora l'equazione assume la forma:

$$\nabla \cdot \mathbf{S} = -\mathbf{J} \cdot \mathbf{E} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\varepsilon}{2} E^2 + \frac{B^2}{2\mu} \right)$$

Il termine in parentesi tonde è l'energia per unità di volume immagazzinata nel *campo elettromagnetico*, mentre il primo addendo a secondo membro rappresenta l'energia per unità di volume dissipata per *effetto Joule*.

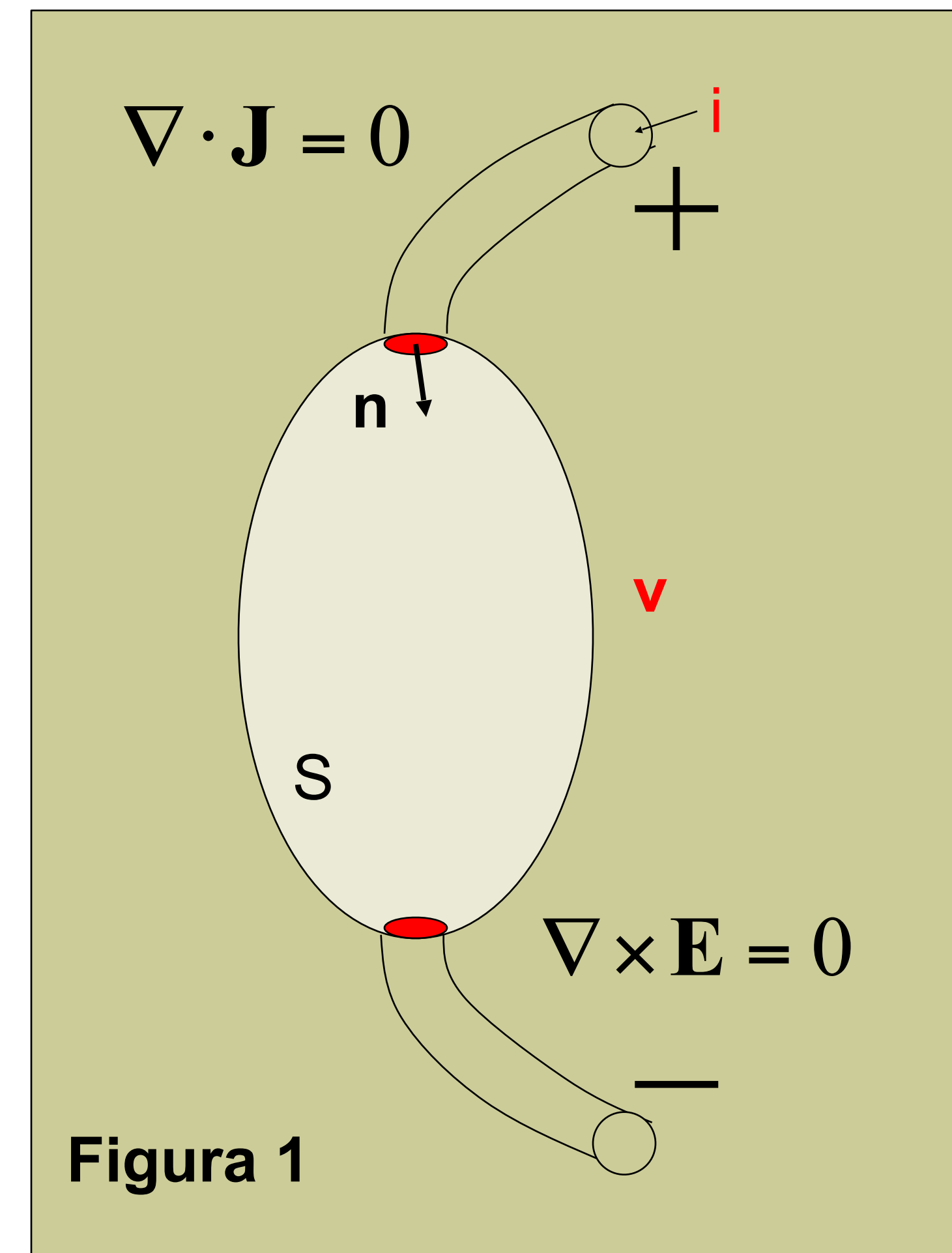
Integrando ambo i membri dell'equazione nel volume racchiuso dalla superficie S , si ottiene:

$$\oint_S \mathbf{S} \cdot \mathbf{n} dS - \int_{\Omega} \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} d\Omega = \frac{dW}{dt}$$

Ove:

$$W = \int_{\Omega} \left(\frac{\varepsilon}{2} E^2 + \frac{B^2}{2\mu} \right) d\Omega$$

Si osservi che i segni dipendono dal fatto che la normale è stata scelta **ENTRANTE** e non **USCENTE** dalla superficie S .





Teorema di Poynting

- L'equazione precedente si interpreta come segue:

La variazione di energia all'interno di un volume è uguale al flusso entrante del vettore di Poynting, che costituisce l'energia fornita da generatori esterni, sottratta dell'energia dissipata per effetto Joule, all'interno del volume stesso.

- Si noti che l'enunciato può essere generalizzato anche in presenza di materiali **non lineari** e di perdite di energia non solo dovute ad effetto Joule (perdite per isteresi ferromagnetica, etc.).
- Tale importante risultato mostra la validità del principio di conservazione dell'energia nel quadro dell'elettromagnetismo.

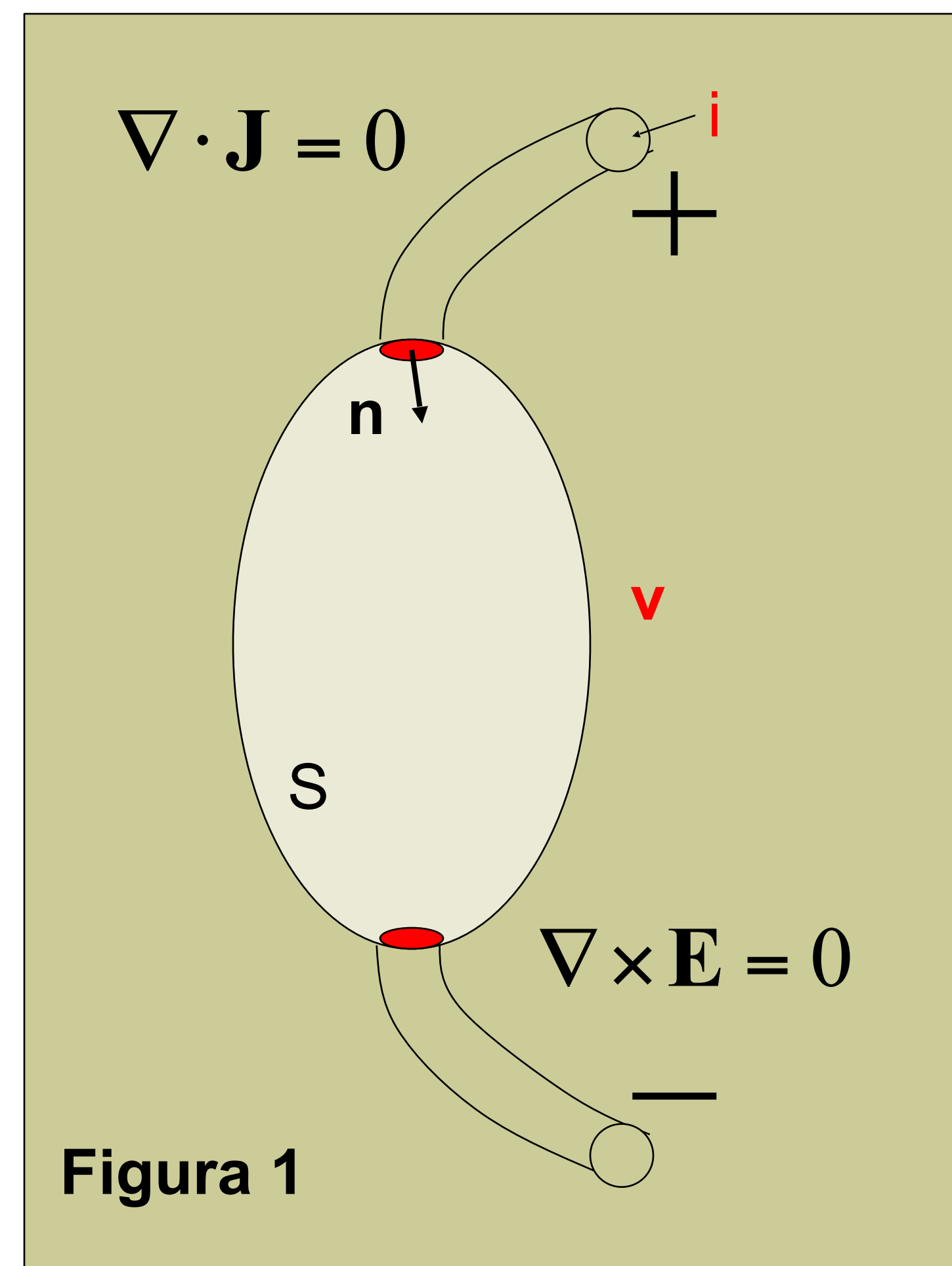
Interpretazione del vettore di Poynting nel quadro del modello circuitale

Si faccia ancora riferimento alla figura 1, dove il volume racchiuso da S è un bipolo. Pertanto, come già accennato, risulta:

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0$$

Quindi il campo elettrico discende da un potenziale scalare.

$$\oint_S \mathbf{S} \cdot \mathbf{n} dS = \oint_S \mathbf{E} \times \mathbf{H} \cdot \mathbf{n} dS = - \oint_S \nabla \varphi \times \mathbf{H} \cdot \mathbf{n} dS$$



L'identità:

$$\nabla \times (\varphi \mathbf{H}) = \nabla \varphi \times \mathbf{H} + \varphi \nabla \times \mathbf{H}$$

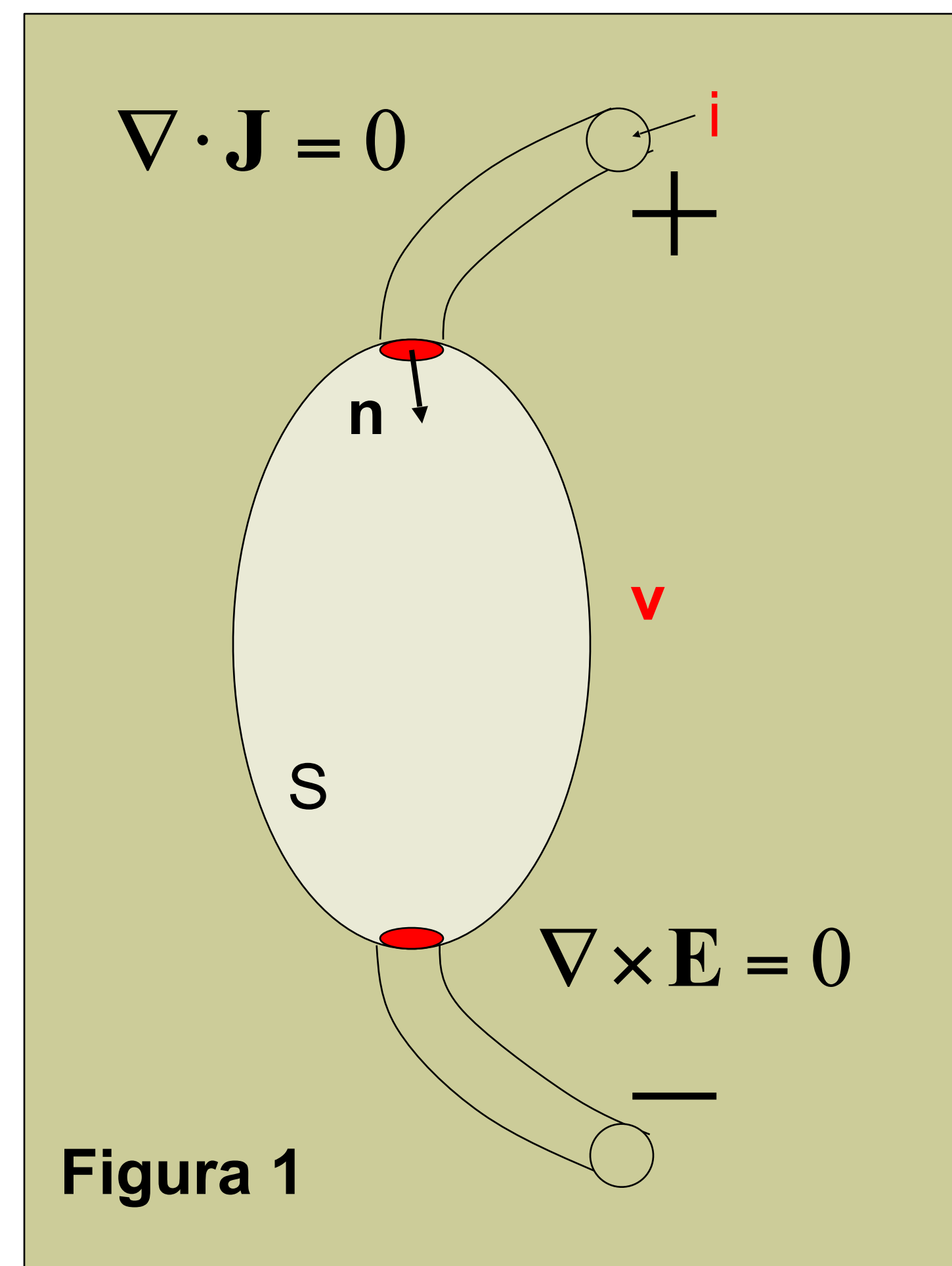
Consente di riscrivere la precedente equazione come segue:

$$\oint_S \mathbf{S} \cdot \mathbf{n} dS = - \oint_S \nabla \times (\varphi \mathbf{H}) \cdot \mathbf{n} dS + \oint_S \varphi \nabla \times \mathbf{H} \cdot \mathbf{n} dS$$

Poiché risulta anche:

$$\oint_S \mathbf{S} \cdot \mathbf{n} dS = - \oint_S \nabla \times (\varphi \mathbf{H}) \cdot \mathbf{n} dS + \oint_S \varphi \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS$$

$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$





Il primo addendo a secondo membro è identicamente nullo, come accade al flusso del rotore di un qualunque campo vettoriale. Pertanto:

$$\oint_S \mathbf{S} \cdot \mathbf{n} dS = \oint_S \varphi \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS$$

Il primo membro, cioè il flusso del vettore di Poynting, come già detto, è l'energia fornita dai generatori esterni al **BIPOLO**. Adesso, **J** è diversa da zero **SOLTANTO** sulle sezioni A e B tra i terminali e la superficie S (superfici in rosso). Inoltre, essendo il terminale costituito da conduttore **IDEALE**, le superfici A e B risultano **EQUIPOTENZIALI**. Ciò conduce alla seguente equazione:

$$\oint_S \mathbf{S} \cdot \mathbf{n} dS = \varphi_A \int_A \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS - \varphi_B \int_B \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS = (\varphi_A - \varphi_B)i(t) = v(t)i(t)$$



Conclusione

- Il flusso del vettore di Poynting è la potenza che un generatore fornisce ad un dato sistema elettromagnetico;
- In condizioni quasi stazionarie tale grandezza assume una forma notevole quanto semplice che si riassume come segue:
 - La potenza fornita ad un bipolo è il prodotto tra la tensione ai suoi capi e la corrente ai morsetti, in simboli:

$$p(t) = v(t)i(t)$$

- Quindi, così come le Leggi di Kirchhoff costituiscono la riduzione delle equazioni di Maxwell ai circuiti (reti di bipoli), la potenza assorbita da un bipolo è la particolarezzazione del flusso del vettore di Poynting ad un sistema elettromagnetico che lavora in condizioni quasi stazionarie.



- Il prodotto $v(t)i(t)$ indica, con i riferimenti prescelti per la tensione e la corrente, che il flusso del vettore di Poynting è **entrante**. Pertanto, tale prodotto rappresenta la potenza **fornita** al bipolo dal resto del circuito. Essa è normalmente chiamata **potenza assorbita**.
- La convenzione di segno scelta per la tensione e la corrente prende il nome di **convenzione dell'utilizzatore**.
- Invertendo il segno della corrente, per esempio, il prodotto $v(t)i(t)$ indica invece che il flusso del vettore di Poynting è **uscente**. Pertanto, il prodotto $v(t)i(t)$ rappresenta la potenza che il bipolo **fornisce** al resto del circuito. Si parla in questo caso di **potenza erogata**.



Esempio

Ai capi del bipolo in figura, con i riferimenti prescelti, si misura una corrente $i = 10\text{ A}$ ed una tensione $v = -28\text{ V}$.

Per la convenzione fatta il prodotto $p(t) = v(t)i(t)$ misura la potenza assorbita. Pertanto, risulta:

$$p(t) = vi = 10(-28) = -280\text{ W}$$

In conclusione, il bipolo sta **EROGANDO** una potenza di 280W verso il circuito a cui è collegato.

